

# 双边界代数法在喷管内流场网格生成中的应用\*

牛 禄, 程惠尔

(上海交通大学 动力与能源工程学院, 上海 200030)

**摘要:** 用一种双边界代数方法生成二维网格, 通过在超限插值函数中引入边界的一阶导数实现网格与边界的正交, 采用几何一致性条件保证物理区域不变形, 发展一系列拉伸方程控制网格在边界或给定位置的间距。应用此方法生成了满意的喷管内流场网格, 网格生成效率明显优于微分方程网格生成方法。

**关键词:** 网格生成; 喷管; 流场; 二维网格; 贴体网格

中图分类号: V231. 1 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055 (2001) 01-0030-04

## Two-boundary algebraic method in the grid generation of nozzle interior field

NIU Lu, CHENG Huier

(School of Power and Energy Engineering, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030, China)

**Abstract:** A two-boundary algebraic method was developed to generate 2-D grid system within geometrically complex 2-D plane domain. The orthogonality near boundaries can be realized by introducing the first-order derivatives of the boundary curves into the transfinite interpolation function. In order to prevent the deformation of the physical domain, the geometrical consistency conditions were used. In addition, a set of stretching functions was derived to adjust the space at the desired location. The usefulness of the method developed was demonstrated by using it to generate a satisfying grid system for nozzle interior field, and its effectiveness is significantly better than the differential equation method.

**Key words:** Grid generation; Nozzle; Flow field; Two dimensional grid; Body-fitted grid

### 1 引言

在对复杂几何域内的流动和传热进行计算时, 经常采用贴体坐标系(网格), 目前常用的贴体网格生成方法有代数法和微分方程法。对于微分方程法, 由于控制方程是一组非线性偏微分方程, 通常采用松弛迭代法求解, 需要较长的计算机时。代数法通过对边界的插值生成网格, 无需求解非线性偏微分方程组, 可大大提高网格生成效率, 但对网格疏密及网格边界正交的控制比较困难。在二维流场、温度场的求解或三维网格边界面的表达中需要解决二维网格生成问题, 故二维网格生成技术仍具意义<sup>[1]</sup>。

本文采用超限插值的双边界代数方法生成喷管内流场二维网格, 通过拉伸函数控制网格的分布, 同时实现边界正交。

### 2 双边界方法

当二维空间域有两条任意形状的边界, 而另外两条边界为直线时, 如喷管纵向剖面, 可采用双边界方法将物理域 $(x, y)$ 映射到计算域 $(\xi, \eta)$ 。

#### 2.1 边界的定义

选择平面域中需要映射的两条处处不相交曲线边界, 如图1中的边界1和边界2, 给出边界1, 2的参数描述为

$$\mathbf{r}_1(\xi, \eta=0) = \mathbf{r}_1(\xi) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_2(\xi, \eta=1) = \mathbf{r}_2(\xi) \quad (2)$$

其中 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 分别为直角坐标系中边界1和边界2的向量表示。 $\xi$ 和 $\eta$ 是曲线贴体坐标系中的坐标, 离散的均分节点坐标为

\* 收稿日期: 2000-01-24; 修订日期: 2000-05-24。

作者简介: 牛 禄 (1973—), 男, 博士生, 研究领域为火箭发动机热过程。

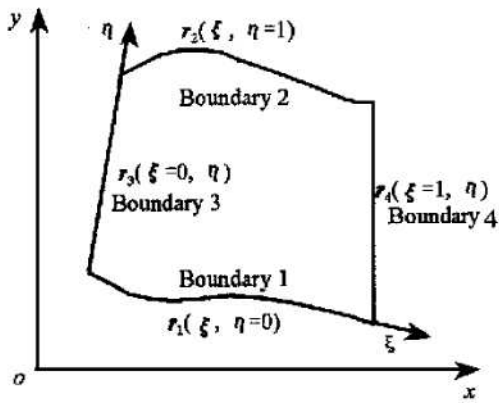


Fig. 1 Arbitrary two-dimensional domain which is suitable for two-boundary method

$$\xi_i = \frac{i-1}{M-1}, \quad i = 1, \dots, M \quad (3)$$

$$\eta_j = \frac{j-1}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4)$$

式中  $M, N$  分别为  $\xi$  和  $\eta$  方向的节点数。

### 2.2 超限插值生成内部网格

通过对选定的两条边界曲线插值即可得到内部网格节点的坐标矢量  $r(\xi, \eta)$ , 超限插值表达式为<sup>[2]</sup>

$$r(\xi, \eta) = r_1(\xi)h_1(\eta) + r_2(\xi)h_2(\eta) \quad (5)$$

其中  $h_1(\eta)$  和  $h_2(\eta)$  是插值函数, 其形式可以是 Lagrange 函数、Hermite 函数或其它形式的插值函数。流场计算中常常要求网格处处正交, 若无法实现, 则至少在边界附近正交, 而式(5)难以实现边界正交的要求, 为此需要在式(5)中引入内部网格线在边界处的一阶导数, 则式(5)成为<sup>[3]</sup>

$$r(\xi, \eta) = r_1(\xi)h_1(\eta) + r_2(\xi)h_2(\eta) + \frac{\partial r(\xi, \eta=0)}{\partial \eta}h_3(\eta) + \frac{\partial r(\xi, \eta=1)}{\partial \eta}h_4(\eta) \quad (6)$$

如图 2 所示, 在边界 1 的  $p$  点附近, 欲使网格线与边界 1 正交, 在  $p$  点, 边界 1 的切向量  $e_\xi$  应该与网格线的切向量  $e_\eta$  垂直。即:

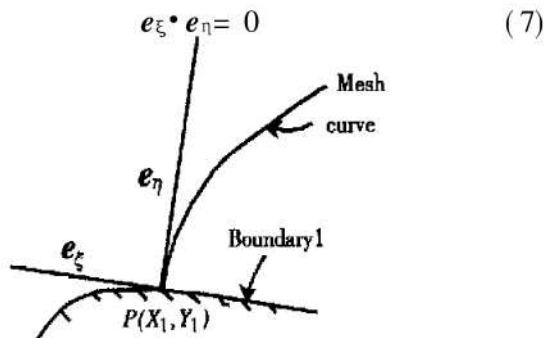


Fig. 2 Realization of orthogonality near boundary

由式(7)可得<sup>[4]</sup>

$$e_\eta = \frac{\partial Y_1}{\partial \xi}i + \frac{\partial X_1}{\partial \xi}j \quad (8)$$

式(8)中  $X_1$  和  $Y_1$  分别是边界曲线 1 的  $x$  坐标和  $y$  坐标, 将  $e_\eta$  化为单位向量  $e_1$ , 欲使网格在边界 1 正交, 则有

$$\frac{\partial r(\xi, \eta=0)}{\partial \eta} = K_1(\xi)e_1 \quad (9)$$

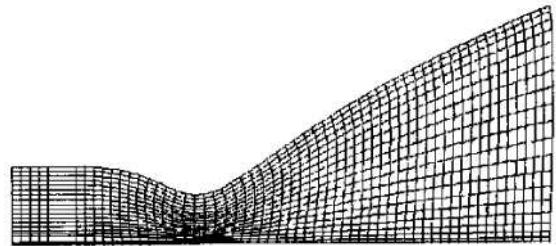


Fig. 3 Grid generated by original two-boundary method which causes the boundary deformation

在式(9)中,  $K_1$  一般取为常数, 用于确定边界 1 处一阶导数的大小, 进而控制网格的分布。同理引入控制参数  $K_2$ , 可得满足网格在边界 2 正交的  $\frac{\partial r(\xi, \eta=1)}{\partial \eta}$  表达式。

若采用 Hermite 插值, 则插值函数  $h_1(\eta), h_2(\eta), h_3(\eta)$  和  $h_4(\eta)$  的表达式分别为

$$h_1(\eta) = 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1$$

$$h_2(\eta) = -2\eta^3 + 3\eta^2$$

$$h_3(\eta) = \eta^3 - 2\eta^2 + \eta$$

$$h_4(\eta) = \eta^3 - \eta^2$$

由式(6)生成的喷管内流场贴体网格如图 3 所示, 可见网格线与喷管壁面、轴线及入口正交, 但出口边界的形状发生了改变, 即插值得到的物理域发生了变形, 原因是用于插值的两边界 1, 2 与二维域中的另外两个直线边界 3, 4 可能不正交, 式(6)、式(8)和式(9)无法保证插值得到二维域的边界 3, 4 的一阶导数与其真实边界 3, 4 的一阶导数相等。因此需要在式(9)中引入几何一致性条件, 使插值得到的网格在两条直线边界 3, 4 上的坐标值和一阶导数都与真实的物理域一致, 这样在与边界 3, 4 相邻的区域, 网格线与边界 1, 2 的夹角将由  $90^\circ$  逐渐过渡到角点上的真实夹角, 而其它区域网格线仍与边界 1, 2 正交, 式(9)增加边界 3, 4 的一阶导数后的修正式为

$$\frac{\partial r(\xi, \eta=0)}{\partial \eta} = \begin{cases} \frac{\partial r_3(\eta=0)}{\partial \eta} \cdot h_1 \left| \frac{\xi}{\xi_1} \right| + K_1(\xi) \cdot e_1(\xi) \cdot h_2 \left| \frac{\xi}{\xi_2} \right| & 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ K_1(\xi) \cdot e_1(\xi) & \xi_1 < \xi < \xi_2 \\ K_1(\xi_2) \cdot e_1(\xi_2) \cdot h_1 \left| \frac{\xi - \xi_2}{1 - \xi_2} \right| + \frac{\partial r_4(\eta=0)}{\partial \eta} \cdot h_2 \left| \frac{\xi - \xi_2}{1 - \xi_2} \right| & \xi_2 \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

在  $\eta=1$  边界上, 可得到类似的  $\frac{\partial r(\xi, \eta=1)}{\partial \eta}$  的修正式。利用修正之后的式(6)改进图3中的网格, 结果见图4。

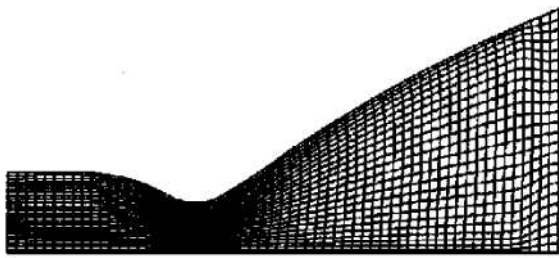


Fig. 4 Grid generated by modified two boundary method

### 3 网格分布的控制

在流场计算中, 变量变化剧烈的位置需要密集的网格。控制网格分布最简单的方法是人工直接指定边界节点的坐标。对感兴趣的位置采用密集的节点, 其它位置节点可以相对稀疏一些, 但此方法费时、费力, 使用不便。一种比较方便的方法是通过拉伸函数控制网格的疏密。若要在两相对边界 1, 2 附近实现网格局部加密, 则可采用下面的拉伸函数:

$$\eta = \frac{(a+1)[(a+1)/(a-1)]^{2\eta-1} - a+1}{2[1+[(a+1)/(a-1)]^{(2\eta-1)}]} \quad (11)$$

式中  $a$  为大于 1 的常数,  $a$  越接近 1, 壁面附近的网格越密集。若只需要在某一个边界附近加密网格, 如图4中喷管的外型面, 可采用下面的拉伸函数:

$$\eta = \eta^b \quad (12)$$

$$\eta = 1 - (1 - \eta)^b \quad (13)$$

式(12)和式(13)分别用于  $\eta=0$  和  $\eta=1$  边界附近网格加密,  $b$  为大于 1 的常数,  $b$  越大, 相应边界附近网格越密。边界 3, 4 附近网格加密的拉伸函数同理可得。

若希望在平面域内部的某段区域得到局部加密的网格, 则需引进下面形式的拉伸函数:

$$\xi = (\xi_2 - \xi_1) \left| \frac{\ln \left| \frac{2(\xi - \xi_1)/(\xi_2 - \xi_1) + a - 1}{-2(\xi - \xi_1)/(\xi_2 - \xi_1) + a + 1} \right|}{2 \ln[(a+1)/(a-1)]} \right| + 0.5 + \xi_1 \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \quad (14)$$

式(14)可以实现  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  区域内部  $\xi$  方向的加密。上式中的  $a$  也是大于 1 的常数,  $a$  越接近 1, 网格越密集。 $\eta$  方向某段区域局部加密的拉伸函数同理可得。用上面各拉伸方程中的  $\xi$  和  $\eta$  分别替代式(6)中的  $\xi$  和  $\eta$  即可对网格分布作相应的控制。

对喷管内流场、温度场的数值模拟, 一般要求网格在壁面附近和喉部密集布置, 应用本节提出的网格控制方法, 得到的与上、下两边界正交且上边界和喉部局部加密的喷管内流场贴体网格如图5所示, 各式中所用常数取值:  $K_1 = K_2 = 40$ ,  $a = 1.05$ ,  $b = 1.5$ , 网格数为  $90 \times 25$ , 图5为整个喷管网格示意图, 图6~8分别为喉部、圆柱段和收敛段以及扩张段的局部放大示意图。

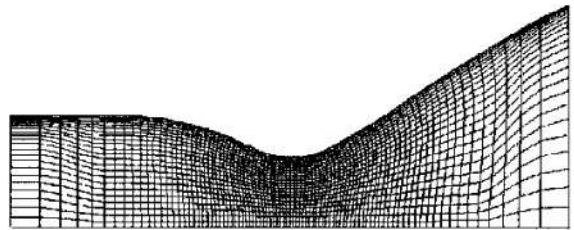


Fig. 5 Local densified grid of the whole nozzle

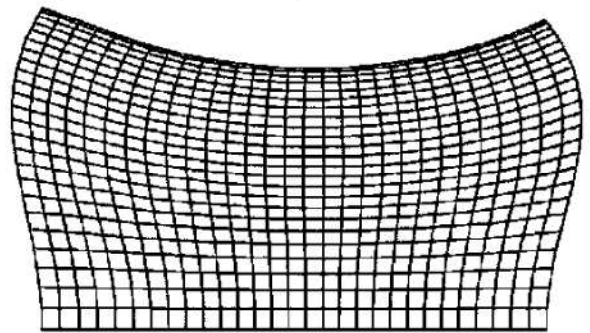


Fig. 6 Grid detail of the throat region

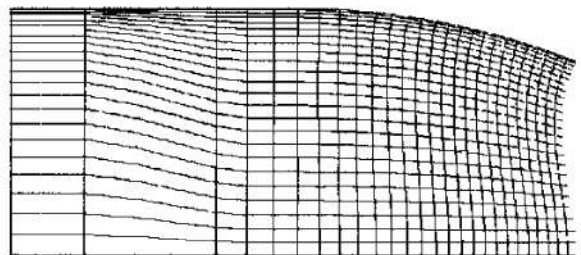


Fig. 7 Grid detail of the cylinder and convergent region

一样。在叶背附面层中, 轴向脉动速度的影响范围是逐渐减小的, 呈衰减趋势。但在叶盆附面层中, 轴向脉动速度在中弦长附近不但没用减小其影响范围, 反而有所扩大。切向脉动速度除在叶背前缘附近附面层有一点影响, 在静子通道中同图 5 相比变化不大。

### 3 结 论

通过数值解非定常薄层近似下的紊流 N-S 运动方程, 计算了一台轴流压气机中径处的转-静二维流场, 并对静子流场进行了时间平均、速度脉动相关分析, 转子尾迹对静子的非定常气动干扰程度同叶片排的轴向间距关系较大。当轴向间距较大时, 尾迹通过对静子通道内的时间平均流场几乎没有影响。而当间距小时, 尾迹对静子附面层有一定的干扰作用, 而对平均流场同样没有太大的影响。

#### 参考文献:

- [1] Adamczyk J J. Unsteady aerodynamic interaction effects on turbomachinery blade life and performance[R]. AIAA Paper 92-0149.

- [2] Mikolajczak A A. The practical importance of unsteady flow [R]. AGARD CP-177, 1977.
- [3] Hunter I. Endwall boundary layer flows and losses in an axial turbine stage [J]. ASME Journal of Engineering for Power, 1982, 104.
- [4] Smith L Jr. Wake ingestion propulsion benefit [R]. AIAA-91-2007.
- [5] Hathaway M D. Unsteady flows in a single stage transonic axial flow fan stator row [R]. NASA TM 88929, 1986.
- [6] Chen J P. Unsteady three dimensional Thir-Layer Navire-Stocks solutions for turbomachinery in transonic flow [D]. Ph. D Dissertation, Mississippi State University, Mississippi, May 1991.
- [7] Janus J M. Advanced 3-D algorithm for turbomachinery [D]. Ph. D Dissertation, Mississippi State University, Mississippi, May 1989.
- [8] Thomas P D, Lombard C K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids [J]. AIAA Journal, 1979, 17(10).

(编辑: 盛汉泉)

(上接第 32 页)

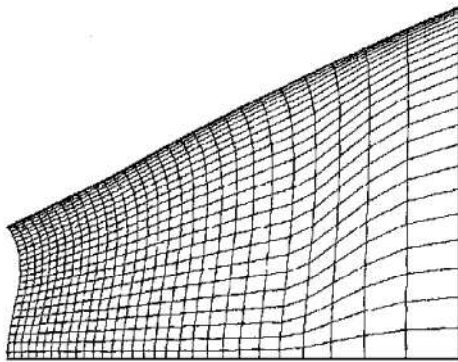


Fig. 8 Grid detail of the divergent region

### 4 讨 论

$K_1$  和  $K_2$  可控制正交由边界向网格内部的扩展程度,  $K_1$  和  $K_2$  取值较大时, 不仅边界, 而且与边界接近的若干内部网格也正交, 但过大的  $K_1$  和  $K_2$  会使内部网格过于密集, 甚至出现网格交错的现象。需要根据生成的网格对  $K_1$  和  $K_2$  作适当的调整, 直到得到满意的网格为止。

采用 Hermit 三次多项式插值函数作为弯曲函数, 有时会得到过于弯曲的网格线, 从而导致网格单

元过于倾斜甚至发生网格交错, 这时可采用张量样条插值, 通过调整张量参数得到介于线性与三次多项式之间的弯曲函数来控制网格线的形状<sup>[5]</sup>。

发展的代数网格生成方法仅用到代数插值运算, 无需迭代求解偏微分方程组, 故网格生成速度远高于微分方程方法, 实践表明计算时间可节省几百倍以上。

#### 参考文献:

- [1] 张正科, 庄逢甘, 朱自强. 两种椭圆型方程求源项方法在喷管内流场网格生成中的应用 [J]. 推进技术, 1997, 18(2).
- [2] 苏铭德, 黄素逸. 计算流体力学基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 143.
- [3] Shih, T F-P, Bailey R T, Nguyen H L, et al. Algebraic grid generation for complex geometries [J]. Int J Numer Meth Fluids, 1991, 13: 1~ 31.
- [4] 《数学手册》编写组. 数学手册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1979: 376.
- [5] Steinthorsson E, Shih T F-P, Roelke R J. Enhancing control of grid distribution in algebraic grid generation [J]. Int. J Numer Meth Fluids, 1992, 15: 297~ 311.

(编辑: 王居信)