

# 基于 LMI 的航空发动机混合 $H_2/H_\infty$ 输出反馈控制\*

谢光华<sup>1</sup>, 曾庆福<sup>2</sup>

(1. 航天机电集团公司 31 所, 北京 100074; 2. 西北工业大学 数据处理中心, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 针对  $H_\infty$  控制器在时域性能方面的不足, 研究了混合  $H_2/H_\infty$  控制问题, 给出了一类结构摄动系统混合  $H_2/H_\infty$  控制器存在的充要条件和控制器的设计方法。对某双转子涡喷发动机的仿真结果表明, 可以对低压转子转速和低压涡轮后温度同时实现无静差鲁棒控制, 并使闭环系统的动态性能品质获得明显改善。

**关键词:** 航空发动机; 控制系统; 反馈控制; 矩阵算法

中图分类号: V233.7 文献标识码: A 文章编号: 1001-4055(2000)06-0028-04

## Mixed $H_2/H_\infty$ output feedback control of aeroengine based on LMI

XIE Guang-hua<sup>1</sup>, ZENG Qing-fu<sup>2</sup>

(1. The 31st Research Inst., Beijing 100074, China;

2. Data Processing Center, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China)

**Abstract:** According to the shortage of  $H_\infty$  controllers in time-domain performance, mixed  $H_2/H_\infty$  control problem was investigated. For a species of systems with structured perturbations, the sufficient and necessary condition that there were mixed  $H_2/H_\infty$  controllers and the method to design a controller were presented. The simulation results for a certain double spool turbojet aero engine reveals that the robust control with no static error for both rotational velocity of low-pressure rotor and temperature at low-pressure turbine outlet in the same time can be realized. And the dynamic performance character of closed loop system is also improved evidently.

**Key words:** Aircraft engine; Control system; Feedback control; Matrix algorithm

## 1 引言

在实际系统中, 由于建模误差及系统工作环境变化都会带来不确定性, 因此鲁棒控制技术的研究有着非常现实的意义。 $H_\infty$ 鲁棒控制理论近十年来有了重大的发展, 它在鲁棒稳定性、抗干扰性等方面有着很大的优势, 然而在时域性能方面却存在不足。由于  $H_\infty$  控制器若存在则不唯一, 这就使得在保证  $H_\infty$  性能的前提下同时考虑其他性能约束的多目标控制成为可能, 其中混合  $H_2/H_\infty$  控制最为备受关注<sup>[1,2]</sup>。文献 [1] 给出了多目标输出反馈控制线性矩阵不等式 (LMI) 优化的完整描述, 但没有考虑

系统的不确定性, 文献 [2] 则只研究了系统阵和控制阵存在结构摄动的混合  $H_2/H_\infty$  状态反馈控制, 并且求得的控制器的阶次较高。

在文献 [1, 3, 4] 的基础上, 本文给出了以线性矩阵不等式表征的一类结构摄动系统混合  $H_2/H_\infty$  控制器存在的充分必要条件, 其中与  $H_\infty$  性能指标有关的系数矩阵全摄动, 并且给出了严格真动态输出反馈控制器设计方法, 控制器的阶次不超过被控对象的阶次。

## 2 结构摄动系统混合 $H_2/H_\infty$ 控制

考虑广义参数不确定性系统

\* 收稿日期: 1999-12-13; 修订日期: 2000-03-10。基金项目: 航空科学基金资助项目 (96C53040)。

作者简介: 谢光华, (1969—), 男, 博士, 工程师, 主要研究飞行器推进系统建模与控制。

$$G(s): \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + \\ (B_1 + \Delta B_1(t))w(t) + (B_2 + \Delta B_2(t))u(t) \\ z_0(t) = C_0x(t) + D_{00}u(t) \\ z_1(t) = (C_1 + \Delta C_1(t))x(t) + \\ (D_{11} + \Delta D_{11}(t))w(t) + (D_{12} + \Delta D_{12}(t))u(t) \\ y(t) = (C_2 + \Delta C_2(t))x(t) + \\ (D_{21} + \Delta D_{21}(t))w(t) + (D_{22} + \Delta D_{22}(t))u(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$ ,  $w \in R^{q_1}$ ,  $u \in R^{q_2}$ ,  $y \in R^{p_2}$  分别为状态向量、干扰输入向量、控制输入向量和测量输出向量,  $z_0 \in R^{p_0}$ ,  $z_1 \in R^{p_1}$  分别表示与  $H_2$  和  $H_\infty$  性能指标有关的被控输出向量。假设系统结构参数摄动可以描述为

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t) \\ \Delta C_1(t) & \Delta D_{11}(t) & \Delta D_{12}(t) \\ \Delta C_2(t) & \Delta D_{21}(t) & \Delta D_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \Sigma(t) [F_1 \ F_2 \ F_3] \quad (2)$$

其中,  $E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3$  为已知定常阵,  $\Sigma(t)$  为未知函数阵, 并假设  $\Sigma(t)$  属于集合:

$$\Omega = \{ \Sigma(t) \mid \Sigma^T(t) \Sigma(t) \leq \rho^2 I, \forall t \} \quad (3)$$

假设 A:  $(A, B_2)$  为可稳定对,  $(C_2, A)$  为可检测对。考虑设计严格真动态输出反馈控制器

$$K(s): \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中  $x_c \in R^k$  为控制器状态向量。使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z_0 = C_{cl0} x_{cl} + D_{cl0} w \\ z_1 = C_{cl1} x_{cl} + D_{cl1} w \end{cases} \quad (5)$$

对于所有可能的不确定性  $\Sigma(t) \in \Omega$ , 满足

$$L_B := \left\{ X \in R^{n \times n} \mid X = X^T > 0, \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \times \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} AX + XA^T + \gamma^2 B_1 B_1^T + \gamma^2 E_1 E_1^T & XC_1^T + \gamma^2 B_1 D_{11}^T + \gamma^2 E_1 E_2^T & XF_1^T + \gamma^2 B_1 F_2^T \\ C_1 X + \gamma^2 D_{11} B_1^T + \gamma^2 E_2 E_1^T & \gamma^2 D_{11} D_{11}^T + \gamma^2 E_2 E_2^T - I & \gamma^2 D_{11} F_2^T \\ F_1 X + \gamma^2 F_2 B_1^T & \gamma^2 F_2 D_{11}^T & \gamma^2 F_2 F_2^T - \lambda^2 \rho^2 I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \\ F_3 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \right. \quad (8)$$

(1)  $H_\infty$  性能:  $A_{cl}$  稳定且  $\|T_{z_1 w}\|_\infty < \gamma$ ;

(2)  $H_2$  性能:  $\|T_{z_0 w}\|_2$  最小。

定理 1<sup>[5]</sup> 对于结构摄动系统  $G(s)$ , 给定  $\gamma > 0$ , 则存在严格真动态输出反馈控制器  $K(s)$ , 使得对于所有可能的不确定性  $\Sigma(t) \in \Omega$ ,  $A_{cl}$  稳定且  $\|T_{z_1 w}\|_\infty < \gamma$ ,  $\|T_{z_0 w}\|_2^2 < \alpha$  当且仅当存在对称正定阵  $P$  和矩阵  $Q$  满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -I & C_{cl1} & D_{cl1} \\ C_{cl1}^T & A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} \\ D_{cl1}^T & B_{cl}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \gamma^2 P & C_{cl0}^T \\ C_{cl0} & Q \end{bmatrix} > 0, \text{Trace}(Q) < \alpha \end{cases} \quad (6)$$

在结构摄动系统  $G(s)$  中, 进一步假设:

假设 B:  $D_{22} = 0$ 。

定理 2<sup>[5]</sup> 结构摄动系统  $G(s)$ , 当  $D_{02} = 0$  时, 给定  $\gamma > 0$ , 则存在严格真动态输出反馈控制器  $K(s)$ , 使得对于所有可能的不确定性  $\Sigma(t) \in \Omega$ ,  $A_{cl}$  稳定且  $\|T_{z_1 w}\|_\infty < \gamma$ ,  $\|T_{z_0 w}\|_2^2 < \alpha$  当且仅当存在  $\lambda > 0$ ,  $(X, Y) \in L_D$  和矩阵  $Q$  满足

$$\sigma_{\max} \left\| \begin{bmatrix} \gamma^{-1} D_{11} & \lambda E_2 \\ \gamma^{-1} \lambda^{-1} \rho F_2 & O \end{bmatrix} \right\| < 1,$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma^2 X & \gamma^2 I & X C_0^T \\ \gamma^2 I & \gamma^2 Y & C_0^T \\ C_0 X & C_0 & Q \end{bmatrix} > 0, \text{Trace}(Q) < \alpha. \end{cases}$$

其中

$$L_D := \left\{ (X, Y) \in R^{n \times n} \times R^{n \times n} \mid X \in L_B, Y \in L_C, \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (7)$$

$$L_C: \left| \begin{array}{c} \mathbf{Y} \in R^{n \times n} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0, \\ \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{D}_{21}^T \\ \mathbf{E}_3^T \end{array} \right|^\perp \times \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} + \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 + \lambda^2\rho^2\mathbf{F}_1^T\mathbf{F}_1 & \mathbf{Y}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1^T\mathbf{D}_{11} + \lambda^2\rho^2\mathbf{F}_1^T\mathbf{F}_2 & \mathbf{Y}\mathbf{E}_1 + \mathbf{C}_1^T\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{C}_1 + \lambda^2\rho^2\mathbf{F}_2^T\mathbf{F}_1 & \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11} + \lambda^2\rho^2\mathbf{F}_2^T\mathbf{F}_2 - \gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_1^T\mathbf{Y} + \mathbf{E}_2^T\mathbf{C}_1 & \mathbf{E}_2^T\mathbf{D}_{11} & \mathbf{E}_2^T\mathbf{E}_2 - \lambda^2\mathbf{I} \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} \mathbf{C}_2^T \\ \mathbf{D}_{21}^T \\ \mathbf{E}_3^T \end{array} \right|^{\perp T} < 0 \quad (9)$$

### 3 航空发动机混合 $H_2/H_\infty$ 稳态控制器设计

某型双转子涡喷发动机只考虑转子的惯性, 忽略气容效应等高频动态, 考虑执行机构的惯性, 发动机线性状态空间模型为 4 阶。在高度  $H = [1.3,$

2.6] km, 马赫数  $Ma = [0.0, 0.8]$  的飞行区域内, 以  $H = 2.0$  km,  $Ma = 0.5$  时的模型为标称被控系统, 其它模型视为围绕基准模型参数摄动<sup>[6]</sup>。

取  $\gamma = 1.0$ ,  $\lambda = 0.6$  求解可得最优  $H_2$  性能为 0.776, 混合  $H_2/H_\infty$  控制器为

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} -21.017 & -59.149 & 443.954 & 54.001 \\ 1.546 \times 10^4 & -1.638 \times 10^4 & 2.380 \times 10^3 & 159.977 \\ -4.753 \times 10^3 & 5.0422 \times 10^3 & -732.54 & -5.189 \\ 711.119 & -758.10 & 107.164 & -25.004 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} -1.250 \times 10^3 & 0.0876 \\ 4.550 \times 10^6 & 317.482 \\ -1.40 \times 10^6 & -96.759 \\ 2.103 \times 10^5 & -49.330 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} 0.000071 & 0.000198 & 0.001166 & 0.002320 \\ -0.679305 & -2.927301 & 2.051619 & 2.485793 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

将控制器串入发动机非线性仿真模型实现输出反馈闭环控制, 控制规律为同时保持低压转子转速  $N_1$  和低压涡轮出口温度  $T_6$  为常数, 控制量为燃油流量  $W_f$  和尾喷口面积  $A_8$ 。图 1 为  $H = 2.5$  km,  $Ma = 0.5$  低压转子转速参考输入在 2.5 s 时增加 100 转的调节曲线, 其中  $N_h$  为高压转子转速, 细实线为没有考虑  $H_2$  性能的基于 LMI 设计的  $H_\infty$  控制器仿真结果, 粗线为基于 LMI 设计的混合  $H_2/H_\infty$  控制器仿真结果; 图 2 为  $H = 2.5$  km,  $Ma = 0.5$  低压涡轮出口温度参考输入在 2.5 s 时降低 50 K 的调节曲线;

图 3 为  $Ma = 0.5$  高度在 2.5 s 时由 2.5 km 降到 1.4 km 的调节曲线; 图 4 为  $H = 2.5$  km 马赫数在 2.5 s 时由 0.5 升到 0.6 的调节曲线。

### 4 结论

从图中可以看出, 控制器对转速和涡轮后温度均实现了无静差鲁棒控制, 同时在考虑  $H_2$  性能的混合  $H_2/H_\infty$  控制器作用下, 闭环系统的动态性能比不考虑  $H_2$  性能时的动态性能品质有了很大改善, 弥补了  $H_\infty$  控制器在时域性能设计方面的不足。

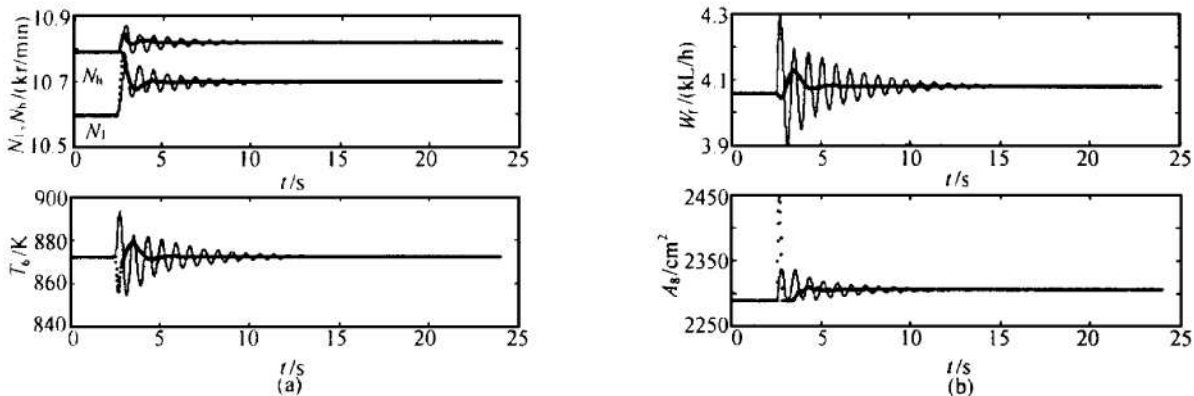


Fig. 1  $N_1$  step response curve

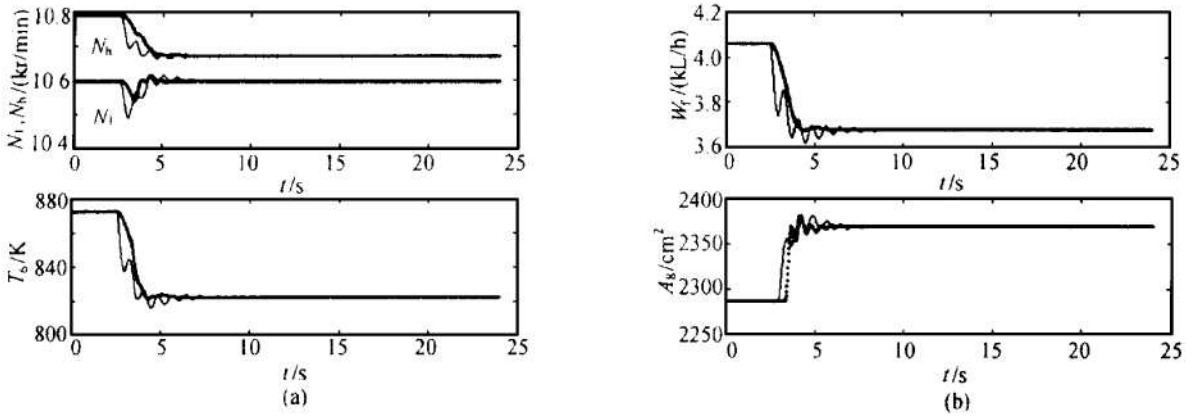


Fig. 2  $T_6$  step response curve

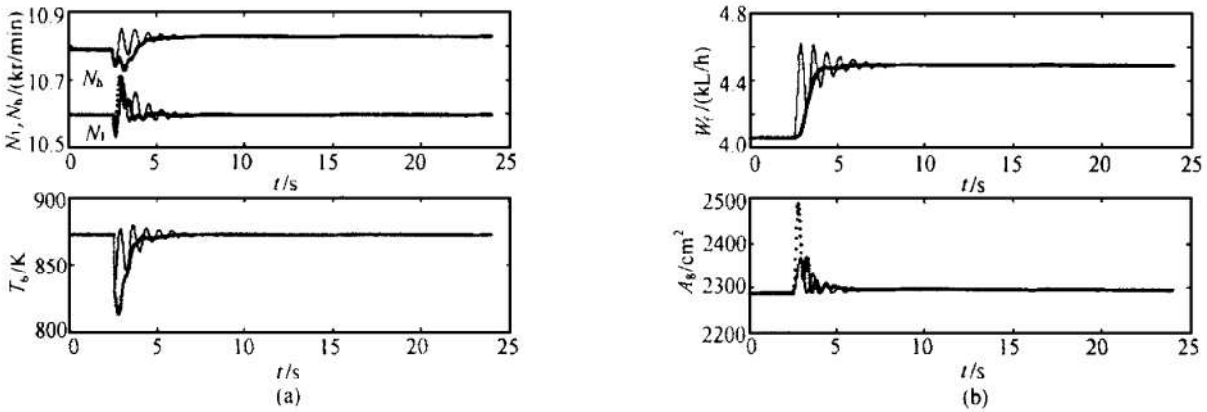


Fig. 3  $H$  step response curve

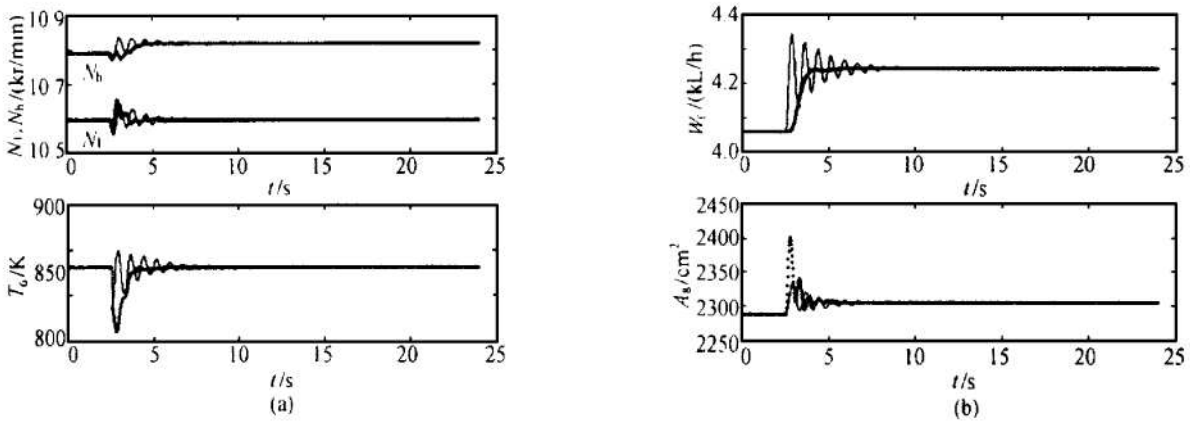


Fig. 4  $Ma$  step response curve

### 参 考 文 献

[1] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization [J]. IEEE Trans Auto Control, AC-42 (7), 1997: 896~ 911.  
[2] 王 曦. 航空发动机结构不确定性系统多变量鲁棒  $H_\infty$  控制 [D]. 西安: 西北工业大学, 1998.  
[3] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control [J]. International Journal of Robust and Nonlin-

ear Control, 1994, 4: 421~ 448.  
[4] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30: 1307~ 1317.  
[5] 谢光华. 航空发动机结构参数摄动非标准  $H_\infty$  多变量鲁棒控制 [D]. 西安: 西北工业大学, 1999.  
[6] 谢光华, 曾庆福. 基于 LMI 的航空发动机鲁棒  $H_\infty$  控制器设计 [J]. 航空学报, 2000, 21 (2).

(责任编辑: 盛汉泉)