

新增表面等效作用力模拟固体推进剂 裂纹动态扩展*

韩小云, 周建平

(国防科技大学 航天技术系, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 固体推进剂作为线粘弹性材料在裂纹扩展过程中, 外力和体力对体系做功的同时, 材料的粘性内耗散和断裂表面能释放使体系能量降低。将裂纹扩展新增表面上等效作用力的概念引进有限元中, 计算裂纹扩展过程中的应力强度因子和断裂表面能释放对体系应力应变场的影响, 从而使得有限元可以模拟计算固体推进剂裂纹的动态扩展过程, 解决了固体推进剂非定常燃烧断裂扩展模拟中的难题。

主题词: 固体推进剂, 裂纹扩展, 有限元法

中图分类号: V 512 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-4055 (2000) 01-0071-04

Kinetic extension of the solid propellant cracks simulated by the equivalent forces working on the virtual new surfaces

Han Xiaoyun, Zhou Jianping

(Dept. of Aerospace Technology, National Univ. of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The crack extension of the solid propellants, as linear viscoelastic material, would be influenced by the work of external forces and body forces the visco-inner-dissipation and the release of fracture surface energy. The idea of the equivalent forces working on the virtual growing new surfaces of crack was introduced into FEM analysis to calculate the stress intensity factors and the influence of the fracture surface energy release to the stress fields when the crack was expanding. So it is possible using the FEM to simulate the kinetic extension of the solid propellant cracks.

Subject terms: Solid propellants; Cracks propagation; Finit element methods

1 引 言

固体推进剂在非定常燃烧断裂扩展耦合过程中, 固相裂纹体在粘性内耗散和流场的应力、温度等载荷作用下产生变形或扩展, 同时裂纹扩展释放断裂表面能使体系应变能减小, 使得固相应力应变场发生变化, 进一步影响固相的变形。为了计算裂纹经过微小扩展以后对固相体系应力应变场的影响, 本文将裂纹新增表面上的等效作用力概念引入有限元计算中, 并通过比较裂纹扩展前后新增表面上力边界条件的变化, 来确定等效力的大小和分布。

2 裂纹动态扩展过程中新增表面等效作用力的确定

假定裂纹扩展为准静态过程, 忽略惯性等其它影响, 仅计及外力功、粘性内耗散对应变能的影响和裂纹扩展时的表面能释放, 用有限元分析时的能量变分关系为^[1]

$$\delta W - \delta D = \delta U + \delta \Phi \quad (1)$$

式中

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{f\} dV + \int_b \{\delta u\}^T \{p\} dS \quad (2)$$

表示体积力 $\{f\}$ 、表面力 $\{p\}$ 对固相体系所作的功;

$$\delta U = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dV \quad (3)$$

表示应变能的变化;

$$\delta \Gamma = \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{T\} dS \quad (4)$$

表示裂纹扩展时新增表面 S_f 上所释放的断裂表面

* 收稿日期: 1999-03-21; 修订日期: 1999-06-23。基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19872076)。
作者简介: 韩小云 (1971-) 男, 博士生, 研究领域: 结构故障智能诊断和寿命预估。

能,用裂纹新增表面上的等效力 $\{T\}$ 对固相体系作功来模拟; δD 表示粘性内耗散。

该式表示体积力和表面力对体系所作的功与体系粘性内耗散之差转变为固相体系的应变能并为固相裂纹扩展提供动力。或者说体积力和表面力对体系所作的功与体系的应变能共同为裂纹扩展提供动力。

假定裂纹可能的虚拟扩展产生新增表面为 S_f 。裂纹不扩展时, $\delta\Gamma = 0$, 表面力边界在 $\partial V = S_b$ 上, 视裂纹虚拟扩展的新增表面 $S_f = 0$, 或视裂纹虚拟扩展的新增表面为位移边界, S_f 的上下两岸间距离为零, 如图 1 (a) 所示。

$$\{u\}_{S_f^+} - \{u\}_{S_f^-} = 0$$

裂纹扩展时, $\delta\Gamma \neq 0$, 表面力边界在 $\partial V = S_b \cup S_f$ 上, 即视裂纹虚拟扩展的新增表面 S_f 的上下两岸为力边界, 受等效力 $\{T\}$ 作用, 如图 1 (b) 所示。也就是说, 裂纹扩展时的表面能释放按裂纹新增表面上的等效力作功来处理, 便于统一按表面力边界条件来描述

$$\int_V \{\delta u\}^T \{f\} dV + \int_{S_b} \{\delta u\}^T \{p\} dS - \delta D = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dV \quad (5)$$

其中 $\{p\}_{S_f} = \{T\}$ 。

在时刻 t_k 体系经粘性耗散后的应力应变状态为 $(\{\sigma(t_k)\}, \{\epsilon(t_k)\})$, 表面力增量为 $\Delta\{P(t_k)\}$, 此二者决定的应力强度因子 (假定为 I 型裂纹) 为 $K_I(t_k)$ 。

若 $K_I(t_k) < K_{IC}$, 则裂纹不扩展; 若 $K_I(t_k) \geq K_{IC}$, 则裂纹扩展。裂纹的扩展量由下式确定:

$$\Delta l(t_{k+1}) = l \quad \Delta t_{k+1} = g(K_I(t_k)) \quad \Delta t_{k+1} \quad (6)$$

其中 l 为裂纹扩展速度, 由应力强度因子确定。显然裂纹扩展新增表面 S_f 由 $\Delta l(t_{k+1})$ 和体系形状确定。

由于裂纹扩展以后, 在裂纹的新增表面上实际的作用力为零, 即裂纹新增表面实际为自由表面, 即在 $\Delta\{p(t_k)\} \{T\}$ 和的作用下体系产生的应力应变场的增量 $(\Delta\{\sigma(t_k)\}, (\Delta\{\epsilon(t_k)\}))$ 和时刻 t_k 的应力应变场 $(\{\sigma(t_k)\}, (\{\epsilon(t_k)\}))$ 叠加以后, 在裂纹新增表面上应力场的值为零

$$(\Delta\{\sigma(t_k)\}) + \{\sigma(t_k)\}_{S_f} = 0 \quad (7)$$

即

$$\Delta\{\sigma(t_k)\}_{S_f} = -\{\sigma(t_k)\}_{S_f}$$

根据应力边界条件得到

$$\begin{aligned} \{T\} = \Delta\{p(t_k)\}_{S_f} = \Delta\{\sigma(t_k)\}_{S_f} \\ - \{\sigma(t_k)\}_{S_f} \end{aligned} \quad (8)$$

这就是裂纹扩展过程中在 t_k 时刻裂纹扩展新增表面上的等效作用力。

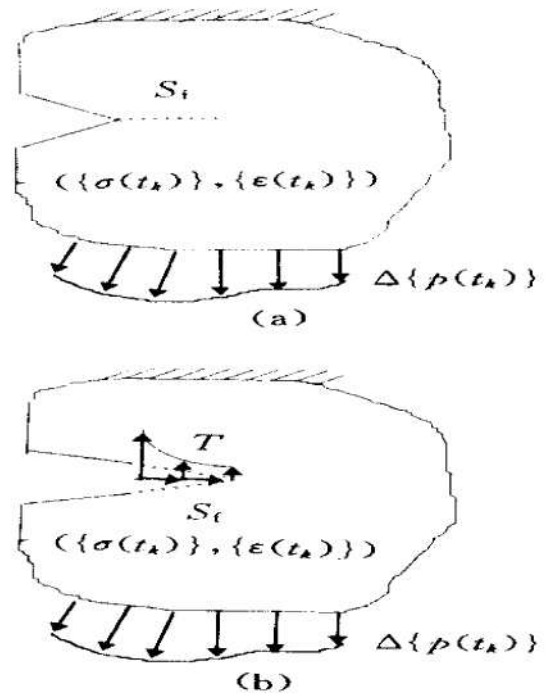


Fig. 1 Equivalent forces working on the growing new surfaces of the crack

(a) Zero-distance between the two virtual new surfaces of the crack

(b) Equivalent forces working on the virtual new surfaces of the crack

为了方便计算, 裂纹的单步扩展量一般都小于有限元网格尺寸, 如果不进行任何处理, 在矢量 $\{T\}$ 中就只有少许几个高斯点的值, 再将其代入有限元边界积分中, 就难保证计算的精度了。根据裂纹顶端应力的奇异性, 不妨将 $\{\sigma(t_k)\}$ 在裂纹延长线上的值拟合成多项式形式, 如压力

$$\sigma_y(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{r}} + B \quad (9)$$

该式仅在裂纹顶端附近 $r \rightarrow 0^+$ 时成立, 且只有两个常数。即只需要在裂纹顶端附近取两个相应的应力值即可确定式中的两个常数。为保证该式的可信性和精度, 势必要求裂纹顶端附近的单元网格划分要具有相当的密度, 以便于准确捕捉裂纹顶端应力的奇异性。但这将增长计算时间, 并将浪费其余点上的应力值信息。鉴于此, 在该式中适当补充几项高次项, 构成 $\theta = 0$ 的 Williams 应力公式

$$\begin{aligned} \sigma_y(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{r}} + B + C \sqrt{r} + \\ D (\sqrt{r})^2 + \dots + E (\sqrt{r})^n \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

即可既不影响力在裂纹顶端的奇异性,又能更多地利用并模拟裂纹延长线上的应力场结构信息,同时在同等计算误差条件下,在裂纹的顶端附近可以划分较少的单元,节约计算时间。用类似式 (10) 表示的等效作用力 $\{T\}$ 在有限元的边界积分中就能保证相当的精度,若在裂纹顶端配合使用奇异单元,效果就更好了。

裂纹扩展新增表面上等效作用力确定以后,用有限元对式 (1) 进行模拟计算就是很成熟的技术了^[2]。

3 应力强度因子的计算

从式 (1) 可以看出,驱动裂纹扩展的能量由体系外力增量做功和体系原有应变能共同提供。由于体系在时刻 t_k 已具有应力应变场 ($\{\sigma(t_k)\}, \{\epsilon(t_k)\}$), 故在裂纹计算虚拟扩展时除了考虑表面力增量 $\Delta\{p(t_k)\}$ 做功对裂纹扩展的变化率 $\Delta W/\Delta l$ 外, 还需在裂纹虚拟扩展新增表面上计及等效力 $\{T\}$ 的影响, 即原有场中应变能对裂纹扩展的变化率 $\Delta U/\Delta l$, 即

$$G = \Delta W/\Delta l + \Delta U/\Delta l \quad (11)$$

对于平面应力问题, 其 I 型应力强度因子为

$$K_I = \sqrt{GEt_k} \quad (12)$$

另一种计算应力强度因子的简单方法是将由表面力增量 $\Delta\{p(t_k)\}$ 确定的应力应变场的增量 $\Delta\{\sigma(t_k)\}, \Delta\{\epsilon(t_k)\}$ 与 $\{\sigma(t_k)\}, \{\epsilon(t_k)\}$ 叠加, 然后将裂纹延长线上垂直于该延长线的应力拟合成式 (10) 的形式, 则裂纹应力强度因子由下式给出

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sigma_y(r, 0) \sqrt{2\pi r} = \sqrt{2\pi A} \quad (13)$$

在有限单元网格划分相同的情况下, 只要选取恰当的 n , 就可以得到准确的计算结果。

4 算例

4.1 计算应力强度因子

用如图 2 所示的线弹性材料单位厚度的方板中心穿透裂纹受单向均匀拉伸来作算例, 以便于同手册解作比较。

$a=4, b=12, l=1$, 弹性模量 $E=1$, 泊松比 $\nu=0.3$ 。应力强度因子的手册解为^[31]

$$K_I = F\sigma \sqrt{\pi l}$$

$$F = \frac{1 - \frac{l}{2a} + 0.326(\frac{l}{a})^2}{\sqrt{1 - \frac{l}{a}}}$$

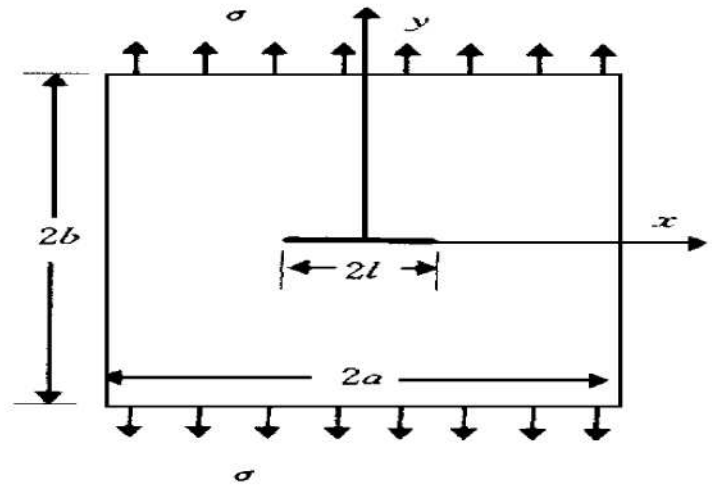


Fig. 2 Central crack of rectangle plate

算例 1: 要求先算出 $\sigma=0.8$ 时板的应力应变状态, 然后再给一个增量 $\Delta\sigma=0.2$, 分别用式 (12)、(13) 所描述的方法来计算应力强度因子。根据叠加原理, 当 $\sigma=1$ 时, 应力强度因子的手册解为 $K_I=1.8325$ 。

算例 2: 要求先算出 $\sigma=1, l=1$ 时板的应力应变状态, 然后人为给一个扩展 $\Delta l=0.1$, 用式 (12) 描述的方法来计算应力强度因子。此例的手册解为 $K_I=1.9369$

根据对称性, 只需将图中右上四分之一离散即可, 裂纹顶端用四分之一节点奇异元, 在多项式拟合中取 $n=5$ 。计算结果与手册解的百分误差如表 1 所示。

从表 1 中可以看出, 不需划分太多的网格, 式 (12)、(13) 所提供的方法都能给出准确的结果。并且, 在算例 1 中可以看出, 式 (13) 有更高的精度, 主要原因在于它较之于式 (12) 少了大量的计算环节。关键的技术处理是给式 (10) 选取恰当的阶次, 在裂纹顶端采用奇异单元。

Table 1 Results of case 1 and case 2

Mesh	Case 1		Case 2
	(17)	(18)	(17)
6	0.300	0.240	0.310
24	0.032	0.027	0.033
54	0.025	0.016	0.023
96	0.019	0.012	0.020
150	0.015	0.010	0.017

4.2 固体推进剂裂纹止裂过程的模拟

如图 2 所示, 某固体推进剂方板中心穿透裂纹受

单向拉伸, 其几何尺寸、材料常数和载荷为:

$$a = 0.1 \text{ m}, b = 0.1 \text{ m},$$

$$l = 0.01 \text{ m}, h = 0.01 \text{ m},$$

$$E(t) = 0.705886 + 0.168169e^{-3.318874 \times 10^{-5} t} + 0.098714e^{-3.318874 \times 10^{-4} t} + 1.930384e^{-3.318874 \times 10^{-3} t} \text{ (MPa)}$$

$$v = 0.496$$

$$\sigma = 0.0229103 + 0.0054581e^{-4 \times 10^{-5} t} + 0.00320387e^{-4 \times 10^{-4} t} + 0.0626527e^{-4 \times 10^{-3} t} \text{ (MPa)}$$

其中, h 为板的厚度。

在衰减载荷作用下, 方板中心穿透裂纹的扩展过程如图 3 所示。图 3 (a) 描述了应力强度因子随时间的衰减情况。虚线所示为临界应力强度因子, 由于整个过程历时极短, 假定临界应力强度因子保持为常数。

从图中可以看出, 应力强度因子随裂纹的扩展, 逐步衰减, 最终小于临界应力强度因子, 这正是裂纹停止扩展的原因。裂纹扩展是一个使应力强度因子增大的因素, 而最终使应力强度因子减小的因素则来自三个方面: 材料本身的内耗散、外载荷的衰减和裂纹扩展时断裂表面能的释放。为了减小计算量和保证较高的计算精度, 本例采用式 (13) 计算应力强度因子, 裂纹新增表面的等效作用力用多项式拟合表示。

图 3 (b) 描述了裂纹扩展速度随时间的变化。裂纹扩展速度由应力强度因子确定^[4,5]

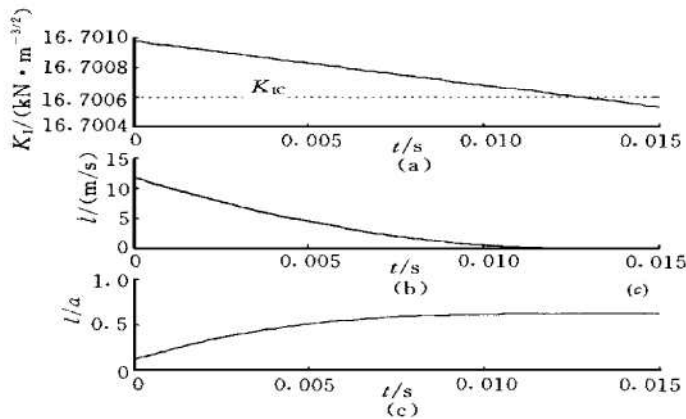


Fig. 3 Growing of the crack

$$\dot{l} = \begin{cases} (K_I - K_{IC})^2 \left| \frac{\partial K_I}{\partial t} \right|^{0.5} & K_I > K_{IC} \\ 0 & K_I \leq K_{IC} \end{cases}$$

由此可以看出, 裂纹扩展速度并不是恒定不变的。因此, 为了较好地模拟裂纹的扩展过程, 在模拟计算中时间步长的选取是很关键的。规范时间步长的选取的原则为:

首先, 在裂纹顶端运动的情况下, 为了保证在移动的有限元节点上插值计算的精度, 裂纹的单步扩展量应在一定程度上小于裂纹顶端有限元单元网格的尺寸; 其次, 当模拟计算的结果不再随着时间步长的减小而产生较显著的变化时, 这个时间步长的选取应当是合适的。在本例中, 将板的右上部分划分了 150 个单元, 仍取 $n = 5$, 用了近 100 步完成整个过程的模拟。

图 3 (c) 给出裂纹扩展长度对方板长度的相对长度曲线。在相对长度大约为 0.62 时, 裂纹停止扩展。

总之, 在固体推进剂裂纹扩展过程中, 用裂纹新增表面上的等效力做功来描述断裂表面能的释放, 无论是计算应力强度因子, 还是计算断裂表面能释放对体系应力应变场的影响, 都是行之有效的。从上面的讨论可以看出, 在处理细节上需注意两个问题: 等效力的多项式描述和对裂纹动态扩展过程进行模拟时时间步长的选取。

参 考 文 献

- 1 张淳源著. 粘弹性断裂力学 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1994.
- 2 刘军虎. 固体火箭发动机药柱的寿命预估 [D]: [学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 1997.
- 3 中国航空研究院编. 应力强度因子手册 [M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- 4 吕光珍. 固体推进剂裂纹扩展的试验研究 [J]. 推进技术, 1988 (6): 41-47.
- 5 韩小云, 周建平. 固体推进剂裂纹燃烧扩展耦合的基本模式 [J]. 推进技术, 1999, 20 (1).

(责任编辑: 龚士杰)